

Bemerkungen und Beispiele:

① Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.
 ($\mathbb{R}^n, \mathbb{R}$ irgendwie normiert)

Dann sind die Funktionen

$$\begin{cases} f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & f_1(t) := f(t, a_2, \dots, a_n), \\ \vdots \\ f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & f_n(t) := f(a_1, \dots, a_{n-1}, t) \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{R}$ für jede Wahl von $a \in \mathbb{R}^n$.

Man sagt:

Stetigkeit impliziert partielle Stetigkeit.

Beweis: betrachte f_1 und wähle $t_0 \in \mathbb{R}$
 sowie eine Folge $\mathbb{R} \ni t_k \rightarrow t_0, k \rightarrow \infty$.

Dann gilt:

$$x_k := (t_k, a_2, \dots, a_n) \rightarrow (t_0, a_2, \dots, a_n) =: x_0$$

also $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$ wegen

Stetigkeit von f . Daraus folgt sofort:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_1(t_k) = f_1(t_0).$$

□

Die Umkehrung ist falsch. ▽

$$\text{Sei } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{in } (0,0) \\ \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

a) f unstetig in $(0,0)$:

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{also: } f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \not\rightarrow f(0), \quad n \rightarrow \infty$$

b) fixiere $y \in \mathbb{R}$; dann ist

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := f(x,y), \quad \text{stetig:}$$

Fall 1: $y = 0 \implies g \equiv 0 \quad \checkmark$

Fall 2: $y \neq 0$

Die Stetigkeit von g auf $\mathbb{R} - \{0\}$ ist klar.

Was passiert bei $x \rightarrow 0$? ~~Beim Grenzwert~~

$$g(x) = x \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \cdot \frac{2}{y} = 0$$

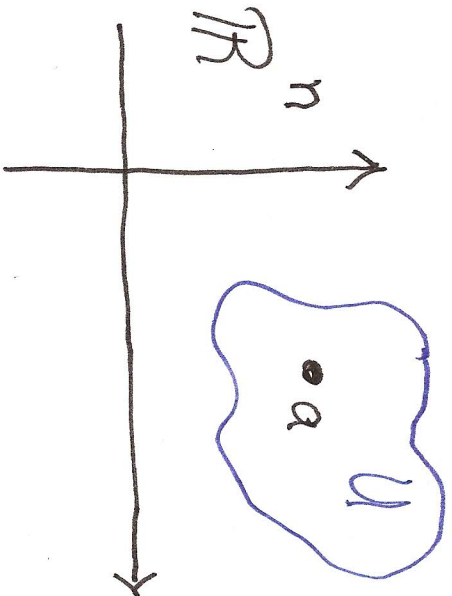
$$\implies \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$$

c) entsprechend: $\mathbb{R} \ni y \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$
stetig auf $\mathbb{R}$ für alle x

Hintergrund: Stetigkeit von $f \hat{=}$

Wohlverhalten auf ganzen Umgebungen;

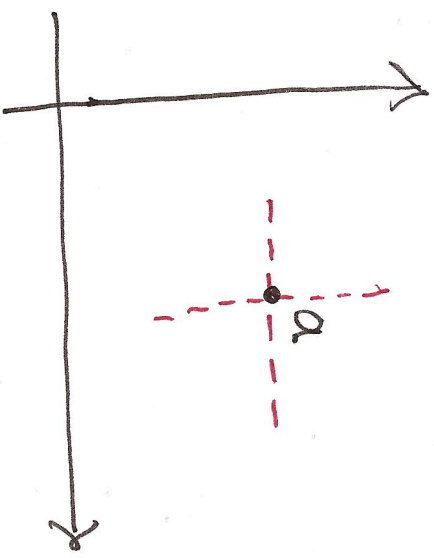
partielle Stetigkeit $\hat{=}$ Wohlverhalten
nur längs der Koordinatenachsen



$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$\forall x \in U$$

(Stetigkeit in a)



$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

nur auf ε

(part. Stetigkeit in a)

② Satz 16.3 ergibt sofort:

$$\left\{ \begin{array}{l} f: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig in } a \iff \\ \text{jede Komponentenfunktion } f_i: (X, d) \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{ist stetig in } a \end{array} \right.$$

③

$$\text{Si } f: (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$$

stetige Abbildung zwischen den metrischen

Räumen (X, d_1) , (Y, d_2) . Ist $A \subset X$ ⁻¹⁹⁶⁻
und versieht man A mit der Metrik

$$d_3 := d_1|_{A \times A}$$

so ist $\varphi|_A : (A, d_3) \rightarrow (Y, d_2)$ stetig.

④ noch ein Bspl:

$X := C^0([a, b])$ mit $\|\varphi\|_\infty := \sup_{[a, b]} |\varphi|$

(Banach Raum) ; $F: X \rightarrow X$,

$$F(\varphi)(x) := \int_a^x \varphi(t) dt, \quad a \leq x \leq b;$$

(warum hat F überhaupt Werte in X ?)

es gilt: $\|F(f) - F(g)\|_\infty \leq$

$$\sup_{a \leq x \leq b} \int_a^x |f(t) - g(t)| dt \leq (b-a) \|f - g\|_\infty$$

$\Rightarrow F$ stetig auf $(X, \|\cdot\|_\infty)$



Satz 16.13 : Seien X, Y metrische Räume.

Für $f: X \rightarrow Y$ sind äquivalent:

(i) f stetig

(ii) Urbilder offener (abgeschlossener) Mengen
in Y sind offen (abgeschlossen) in X .

Bem: 1.) Für "Bilder" ist das falsch!

$f: X \rightarrow Y$, $f \equiv \text{const}$, ist stetig,

aber $\{ \text{const} \} = f(X)$ i.a. nicht

offen in Y (z.B. $Y = \mathbb{R}^n$)

2.) (ii) wird gerne als Def. der Stetigkeit von Abbildungen zwischen topologischen Räumen gewählt.

Beweis: (i) $\implies$ (ii)

$W \subset Y$ sei offen; man setzt $U := f^{-1}(W)$.

Fall 1: $U = \emptyset$ ✓

Fall 2: $U \neq \emptyset$

Dann ist für $a \in U$ zu zeigen:

$$\exists \delta > 0 \text{ mit } B_\delta(a) \subset U$$

beachte: $f(a) \in W$

$$W \text{ offen} \implies \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon(f(a)) \subset W$$

f stetig (in a) $\implies$

$\exists \delta > 0$ mit $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$;

Zusammen: $f(B_\delta(a)) \subset W \implies$

$$B_\delta(a) \subset f^{-1}(W) = U.$$

(ii) $\implies$ (i) Sei $a \in X$. Wir zeigen die

Stetigkeit von f in a . Sei $\varepsilon > 0$.

$$\implies B_\varepsilon(f(a)) \text{ offen} \xrightarrow{(ii)} f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$$

offen mit $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$. Also gibt

es $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$,

d.h. $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$.



Zur Übung beweise selbst

Satz 16.14 (Rechenregeln)

Seien X, Y, Z metrische Räume, V sei ein normierter Raum.

$$(i) \quad f, g: X \rightarrow \underline{V} \text{ stetig} \implies$$

$$\lambda f + g: X \rightarrow V \text{ stetig}$$

$$(ii) \quad V = \mathbb{R}, \quad f, g: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

$$\implies f \cdot g: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig und auch } f/g, \text{ falls } g(x) \neq 0 \forall x \in X$$

$$(iii) \quad f: X \rightarrow Y, \quad g: Y \rightarrow Z \text{ stetig}$$

$$\implies g \circ f: X \rightarrow Z \text{ stetig}$$

Beweis: (i), (ii) wie früher im Fall $X = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
mit Folgen;

(iii) auch mit Folgen oder so:

$$\text{Sii } V \subset Z \text{ offen} \implies (g \circ f)^{-1}(V) = \\ f^{-1}\left(\underbrace{g^{-1}(V)}_{\text{offen in } Y}\right) \text{ offen in } X$$

mit 2 maliger Benutzung von Satz 16.13. $\square$

Beispiele ① $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$
(mit irgendeiner Norm)

Polynome in n Veränderlichen

Indexmenge $I := \mathbb{N}_0^n$

$\alpha \in I$ Multiindex, also

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ mit } \alpha_i \in \mathbb{N}_0$$

Man setzt:
$$X^\alpha := X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$$

(Monom)

Def: Seien für $\alpha \in I$ reelle Zahlen a_α gegeben mit $a_\alpha = 0$ bis auf höchstens endlich viele α . Dann heißt

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \sum_{\alpha \in I} a_\alpha x^\alpha,$$

ein Polynom in n (reellen) Variablen.

Konkret auf $\mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) := 5x^4 z^2 + 7x^3 + x y z$$

Multiindices hierbei:

$$(4, 0, 2), (3, 0, 0), (1, 1, 1)$$

Satz : Polynome sind stetig auf $\mathbb{R}^n$.

Bw: Rechenregeln $\implies$: man muss nur

$X \mapsto X^\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{N}_0$ anschauen;

ebenfalls aus den Rechenregeln folgt Stetigkeit

von $X \mapsto X^\alpha$ aus der von $X \mapsto X_i^{\alpha_i}$,

$i = 1, \dots, n$. Das ist aber klar mit dem

Folgenkriterium.

② Rationale Fkten auf $\mathbb{R}^n$ ($=$ Quotienten von Polynomen) sind dort stetig, wo sie definiert sind.

③ Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter

Raum. Dann ist $\varphi := \|\cdot\|$ stetig,

$$\text{denn: } |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq$$

$$\|x - y\| \quad (\text{nach der umgekehrten } \Delta\text{-Ungl.}).$$

φ erfüllt sogar mehr:

Def 16.12 : Seien $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ metrische

Räume. $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$ heißt Lipschitz (stetig)
(bzgl. d_1 und d_2 ∇) $:\iff$

$$\exists L \geq 0 : (*) \quad d_2(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L d_1(x, y) \\ \forall x, y \in X_1.$$

Das inf aller L mit $(*)$ heißt optimale
Lipschitz Konstante, Bezeichnung $\text{Lip}(\varphi)$.

Bem + Bsp:

- 1.) die Norm ist Lipschitz $X \rightarrow \mathbb{R}$
($X = \text{normierter V.R.}$)
- 2.) f Lipschitz $\implies f$ stetig
($\delta := \varepsilon/L$)
- 3.) In metrischen Räumen (X, d) ist der Abstand zu einer Menge $M \neq \emptyset$ Lipschitz.

Beweis: Sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) :=$

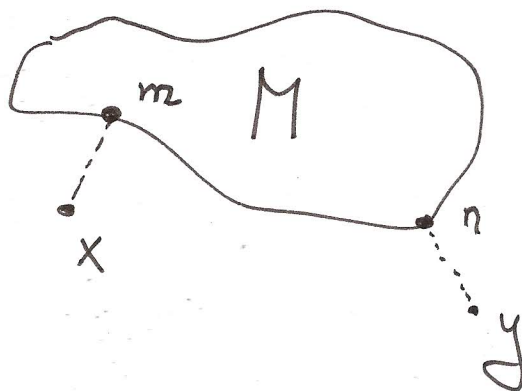
$$\text{dist}(x, M) := \inf \{d(m, x) : m \in M\}$$

Zu $x, y \in X$

wähle

$m \in M, n \in M$

mit



$$\textcircled{*} \begin{cases} d(x, m) \leq f(x) + \varepsilon, \\ d(y, n) \leq f(y) + \varepsilon \end{cases}$$

bei gegebenem $\varepsilon > 0$. Es folgt:

$$f(y) \leq d(y, m) \leq d(y, x) + d(x, m) \leq \textcircled{*}$$

Auf. $\triangleleft$ Ungl.

$$d(y, x) + f(x) + \varepsilon \implies$$

$$f(y) - f(x) \leq \varepsilon + d(y, x)$$

und aus Symmetriegründen

$$f(x) - f(y) \leq \varepsilon + d(x, y).$$

Mit $\varepsilon \rightarrow 0$ ergibt sich

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y).$$